

Колмаков И.Б.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ

(исследование проведено при финансовой поддержке РГНФ, проект №16 – 02 – 00533/16)

Распределение населения по уровню среднедушевых денежных доходов (СДД), рассчитывается Росстатом с использованием логарифмически-нормального распределения [1; 2]. Кривая плотности вероятностей логарифмически нормального распределения населения по уровню СДД с параметрами μ и σ^2 (математическое ожидание и дисперсия логарифма дохода x) имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Важнейшими индикативными характеристиками плотности логнормального распределения численности населения по уровню СДД являются [3; 4]:

модальное значение $X_{mod} = \exp(\mu - \sigma^2)$; (2)

медианное значение $X_{med} = \exp(\mu)$; (3)

среднее значение $X_c = \exp(\mu + 0.5\sigma^2)$. (4)

Между индикативными характеристиками существует параметрическая связь, определяемая дисперсией логарифма дохода $-\sigma^2$. Чем больше

значение σ^2 или чем дальше находятся индикативные характеристики друг от друга, тем больше степень неравномерности доходов и выше степень расслоения населения.

Уравнения (2), (3) и (4) образуют три системы из двух уравнений с двумя неизвестными μ и σ . Решая любую из них, получаем параметры распределения μ и σ , выраженные через индикативные характеристики распределения (X_{mod} , X_{med} и X_c), имеющие явный экономический смысл [3]. Так как все три системы уравнений описывают одно и то же распределение населения по уровню СДД, то для всех трех систем уравнений параметры μ и σ должны быть одинаковы. Проверка этого утверждения на данных Росстата за 2015 год ($X_c=30473,6$ руб.; $X_{med}=22718,4$ руб.; $X_{mod}=12626,6$ руб.) показала, что точность расчетов параметров распределения достаточно высокая [3]:

$$\mu = 10,0309307 \pm 0,00000003; \sigma = 0,7664008 \pm 0,00000005.$$

Для оценки неравенства, наряду с распределением численности населения, необходимо рассматривать

распределение доходов населения. Плотность вероятности распределения доходов населения по уровню СДД — $\varphi(x)$ — имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{X_c} x f(x) = \frac{1}{X_c \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

Также как и для $f(x)$ — плотности логнормального распределения численности населения по уровню СДД, для $\varphi(x)$ — плотности логнормального распределения доходов населения, важнейшими индикативными характеристиками являются [3]:

модальное значение плотности дохода $X_{\varphi mod} = \exp(\mu)$; (6)

медианное значение плотности дохода $X_{\varphi med} = \exp(\mu + \sigma^2)$; (7)

среднее значение плотности дохода $X_{\varphi c} = \exp(\mu + 1,5\sigma^2)$. (8)

Видно, что модальное значение плотности дохода $\varphi(x)$ (6) в точности соответствует медианному значению плотности распределения численности населения $f(x)$ (3).

На рис. 1 приведены кривые логарифмически-нормального распределения населения по уровню СДД — плотность вероятности распределения численности населения $f(x)$ и кривая логарифмически-нормального распределения доходов по уровню СДД — плотность вероятности распределения доходов $\varphi(x)$. На этих же кривых обозначены основные индикативные точки.

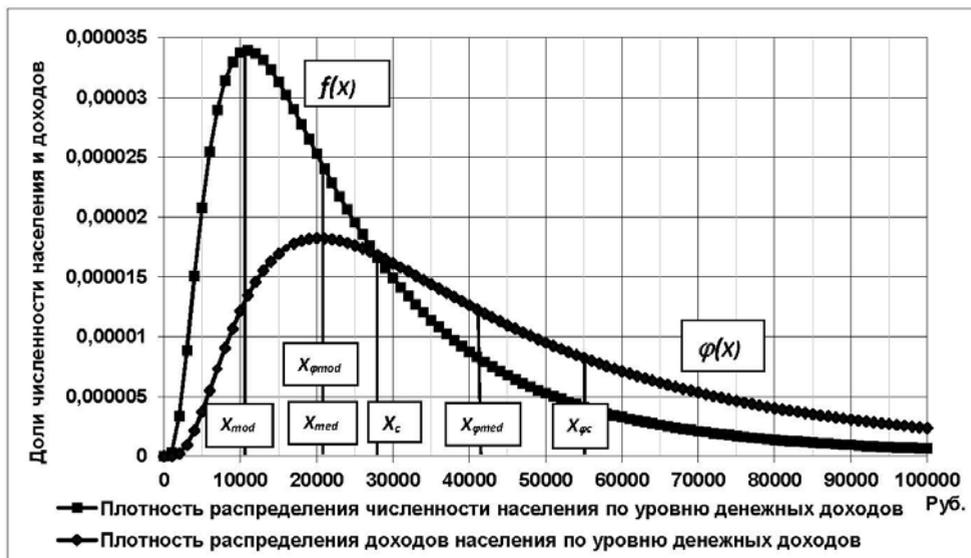


Рис. 1. Графики плотностей распределения численности населения — $f(x)$, денежного дохода — $\varphi(x)$ и индикативные точки этих кривых

Интегральной характеристикой плотности вероятностей логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевых

денежных доходов является функция распределения накопленных долей численности населения:

$$F(x) = \int_0^x f(u)du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du. \quad (9)$$

Накопленные доли доходов населения по уровню СДД есть интеграл или функция $D(x)$:

$$D(x) = \int_0^x \varphi(u)du = \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du. \quad (10)$$

Именно функции $F(x)$ и $D(x)$ определяют кривую Лоренца и индекс Джини, а следовательно, и дифференциацию денежных доходов населения. Эти функции позволяют определять, какая доля численности населения обладает каким объемом доходов. В работе [5] исследовалось поведение разности долей функций $R(x) = F(x) - D(x)$ и установлены зависимости, определяющие связь индекса Джини с показателем распределения σ и нормированным значением интеграла $R(x)$. На рис. 2 приведен вид интегральных характеристик функций $F(x)$, $D(x)$ и $R(x)$.

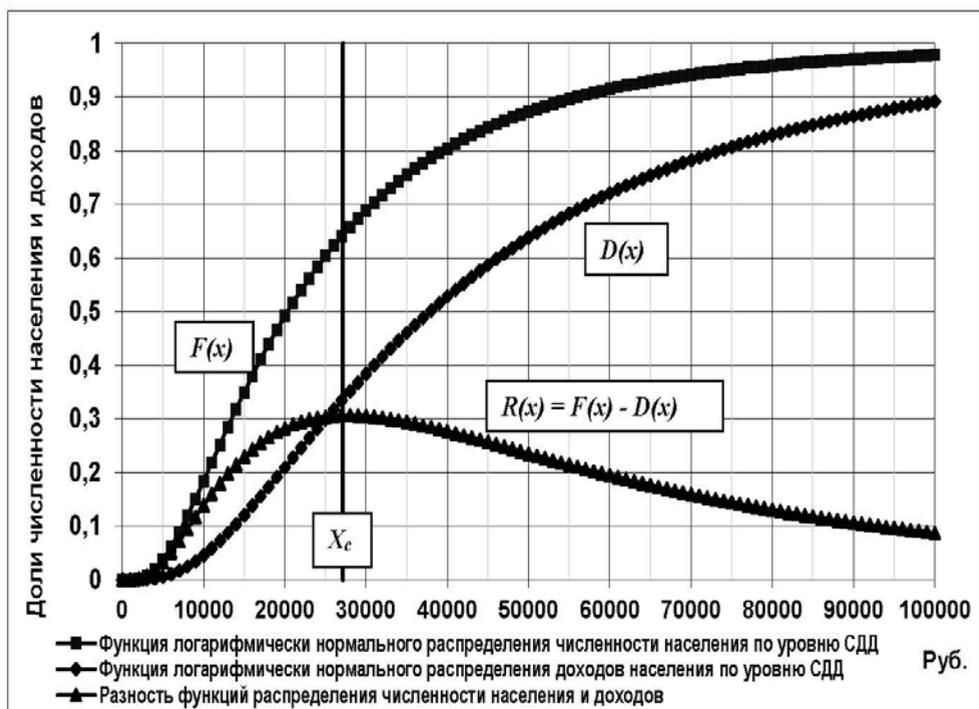


Рис. 2. Графики функций распределения по уровню СДД: накопленных долей численности населения — $F(x)$, накопленных долей денежных доходов населения — $D(x)$ и долей разности этих функций — $R(x)$

Индикативные полярные характеристики доходов населения

Социальная устойчивость общества определяется численностью и доходами «среднего класса». Из двух официально используемых показателей дифференциации доходов никак не следует оценка численности «среднего класса», кроме очевидного утверждения: «чем меньше индекс Джини, тем выше численность «среднего класса».

В процессе обсуждений проблем социальной устойчивости общества настоятельно выявлялась необходимость иметь такие характеристики доходов, которые позволяли бы оценивать расслоение населения по уровню денежных доходов относительно неких индикативных показателей доходов. Если условно X_i считать индикативным доходом, то логично рассматривать характеристики (долю численности, долю дохода и средний доход) тех, кто имеет доходы ниже X_i и тех, кто имеет доходы выше, и сравнивать их между собой.

Поскольку эти характеристики полярно отличаются по знаку оцениваемых параметров, то назовем эти характеристики расслоения населения по уровню денежных доходов *полярными*. При расчете полярных характеристик требования к ним были весьма простые: не противоречить общепринятым, не заменять, а дополнять существующие, отличаться простотой и ясностью экономической трактовки, и прозрачностью вычислений.

В качестве индикативных границ деления населения и, соответственно доходов, выберем индикативные показатели, имеющие явный экономический смысл: модальный доход (2),

доход медианной численности населения (3), средний доход (4), медианное значение плотности дохода (7), среднее значение плотности дохода (8).

Фиксация границы расслоения на уровне выбранного индикативного дохода выявляет *поляризацию* населения и позволяет определить, какая часть населения имеет доходы ниже выбранного индикативного уровня, какой частью доходов владеет и какой средний доход в этой исследуемой группе. Точно также определяются характеристики группы населения, имеющего доходы выше выбранного уровня.

Сравнение средних доходов этих полярных групп населения позволяет получать количественную характеристику неравенства и не менее емко характеризуют дифференциацию доходов, чем индекс Джини. Поэтому предлагается наряду с уже используемыми показателями дифференциации рассматривать другие показатели: *индексы поляризации денежных доходов населения*:

- 1) индекс поляризации модального дохода (X_{mod}) **IMD**;
- 2) индекс поляризации дохода медианной численности (X_{med}) **IME**;
- 3) индекс поляризации среднего доход $a(X_c)$ **ISR**;
- 4) индекс поляризации численности медианного дохода ($X_{\varphi med}$) **IMR**;
- 5) индекс поляризации среднего значения плотности дохода ($X_{\rho c}$) **ISD**.

Методы расчета всех индексов поляризации одинаковы¹. Поэтому далее приводится только расчет индекса поляризации модального дохода — **IMD**. Для других индексов пред-

¹ Индекс поляризации среднего дохода **ISR** подробно рассмотрен в работах [5; 6].

ставлены конечные результаты — формулы и графики, которые позволяют понимать трактовку и получать их количественные оценки.

Индекс поляризации модального дохода — IMD

Если индикативной границей доходов населения считать модальный доход X_{mod} , то индекс поляризации модального дохода предлагается определять, как отношение среднего дохода в относительно высокодоходной группе населения (ВДГ) к среднему доходу в относительно низкодоходной группе (НДГ).

Доля численности тех, кто имеет доходы ниже модального значения, равна:

$$F_{Lmod}(X_{mod}) = \Phi(-\sigma) = 1 - \Phi(\sigma)$$

Доля доходов низкодоходной группы в общем объеме доходов населения составит:

$$D_{Lmod}(X_{mod}) = \Phi(-2\sigma) = 1 - \Phi(2\sigma)$$

Тогда средний доход в группе населения с доходами ниже модального уровня равен:

$$SD_{Lmod} = \Phi(-2\sigma)/\Phi(-\sigma) = (1 - \Phi(2\sigma))/(1 - \Phi(\sigma))$$

Аналогичные расчеты проводятся для группы населения с доходами выше модального уровня. Последовательно вычисляется доля численности этой группы населения, доля доходов этой группы в общем объеме доходов и средний доход:

$$F_{Hmod}(X_{mod}) = 1 - \Phi(-\sigma) = \Phi(\sigma);$$

$$D_{Hmod}(X_{mod}) = 1 - \Phi(-2\sigma) = \Phi(2\sigma);$$

$$SD_{Hmod} = \Phi(2\sigma)/\Phi(\sigma).$$

Отношение средних доходов населения в группе с доходами выше модального уровня, к средним доходам населения в группе с доходами ниже модального уровня дает очень простую и наглядную процедуру построения *индекса поляризации модального дохода* (рис. 3).

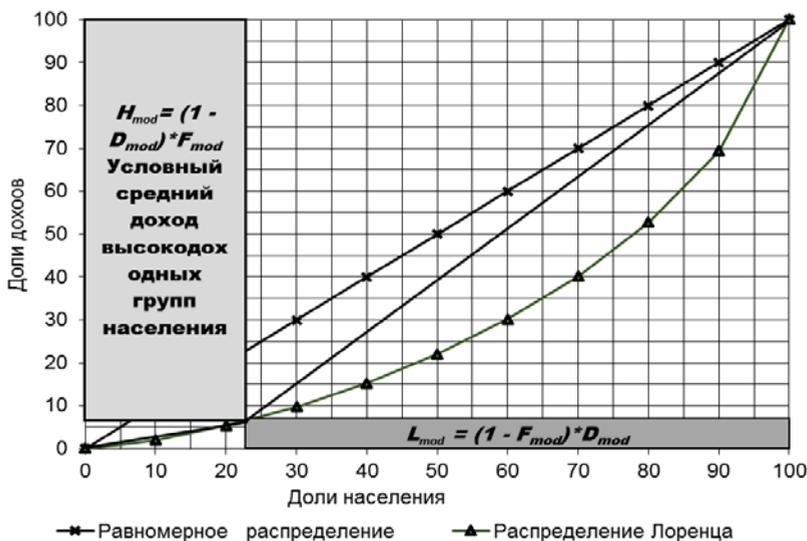


Рис. 3. Графическая интерпретация индекса поляризации модального дохода IMD

Через точку с координатами модального дохода ($F_{Lmod}(X_{mod}); F_{Lmod}(X_{mod})$) проводятся горизонталь и вертикаль до пересечения с осями координат. В левом верхнем углу и правом нижнем образуются два прямоугольника. Площадь левого верхнего прямоугольника

$H_{mod} = (1 - D_{Lmod}(X_{mod})) \cdot F_{Lmod}(X_{mod})$, трактуется как условный средний доход населения с доходами выше модального, а площадь прямоугольника в правом нижнем углу

$L_{mod} = (1 - F_{Lmod}(X_{mod})) \cdot D_{Lmod}(X_{mod})$ — как условный средний доход населения с доходами ниже модального. Отношение площадей прямоугольников H_{mod} и L_{mod} и есть индекс поляризации модального дохода:

$$IMD = H_{mod}/L_{mod} = (1 - D_{Lmod}(X_{mod})) \cdot F_{Lmod}(X_{mod}) / ((1 - F_{Lmod}(X_{mod})) \cdot D_{Lmod}(X_{mod})) = (\Phi(2\sigma)/\Phi(\sigma)) \cdot (1 - \Phi(\sigma)) / (1 - \Phi(2\sigma)) \quad (11)$$

В случае «абсолютного равенства» $H_{mod} = L_{mod}$ индекс поляризации $IMD = 1$. В случае «абсолютного неравенства» $H_{mod} \rightarrow 1$ и $L_{mod} \rightarrow 0$ и индекс поляризации $IMD \rightarrow \infty$.

Теоретический диапазон изменения индекса поляризации модального дохода $1 < IMD < \infty$, а фактический — значительно меньше.

Индекс поляризации дохода медианной численности IME

Индикативной границей доходов в этом случае принимается доход, соответствующий доходу медианной численности населения X_{med} . Доля численности тех, кто имеет доходы ниже медианного уровня и доля численности тех, кто имеет доходы выше медианного, равны $\Phi(0) = 0,5$.

$$F_{Lmed}(X_{med}) = \Phi_{Lmed}(v_{med}) = 0,5.$$

Доля дохода $D_{Lmed}(X_{med})$ и средний доход SD_{Lmed} в группе населения с доходами ниже медианного дохода составляют:

$$D_{Lmed}(X_{med}) = \Phi(-\sigma) = 1 - \Phi(\sigma); \\ SD_{Lmed} = \Phi(-\sigma)/0,5 = (1 - \Phi(\sigma))/0,5.$$

Аналогичные показатели для группы с доходами выше медианной численности:

$$D_{Hmed}(X_{med}) = 1 - \Phi(-\sigma) = \Phi(\sigma); \\ SD_{Hmed} = \Phi(\sigma)/0,5 = (1 - \Phi(-\sigma))/0,5.$$

Индекс поляризации дохода медианной численности:

$$IME = SD_{Hmed}/SD_{Lmed} = \Phi(\sigma)/\Phi(-\sigma) = \Phi(\sigma)/(1 - \Phi(\sigma))$$

Графическая интерпретация индекса поляризации дохода медианной численности приведена на рис. 4. Через точку на кривой Лоренца с координатами $\{0,5; D_{Lmed}(X_{med})\}$ проводятся горизонталь и вертикаль до пересечения с осями координат. В левом верхнем углу и правом нижнем образуются два прямоугольника.

Площадь левого верхнего прямоугольника $H_{med} = (1 - D_{Lmed}(X_{med})) \cdot 0,5$ трактуется как условный средний доход населения с доходами выше дохода медианной численности, а площадь прямоугольника в правом нижнем углу $L_{med} = 0,5 \cdot D_{Lmed}(X_{med})$ — как условный средний доход населения с доходами ниже дохода медианной численности.

Отношение площадей прямоугольников H_{med} и L_{med} и есть индекс поляризации дохода медианной численности:

$$IME = H_{med}/L_{med} = (1 - D_{Lmed}(X_{med})) \cdot 0,5/0,5 \cdot D_{Lmed}(X_{med}) = \Phi(\sigma)/(1 - \Phi(\sigma)) \quad (12)$$

В случае «абсолютного равенства» $H_{med} = L_{med}$ и индекс поляризации $IME = 1$.

В случае «абсолютного неравенства» $H_{med} \rightarrow 1$ и $L_{med} \rightarrow 0$ и индекс по-

ляризации $IME \rightarrow \infty$. Теоретический диапазон изменения индекса $1 < IME < \infty$, а фактический — значительно меньше.

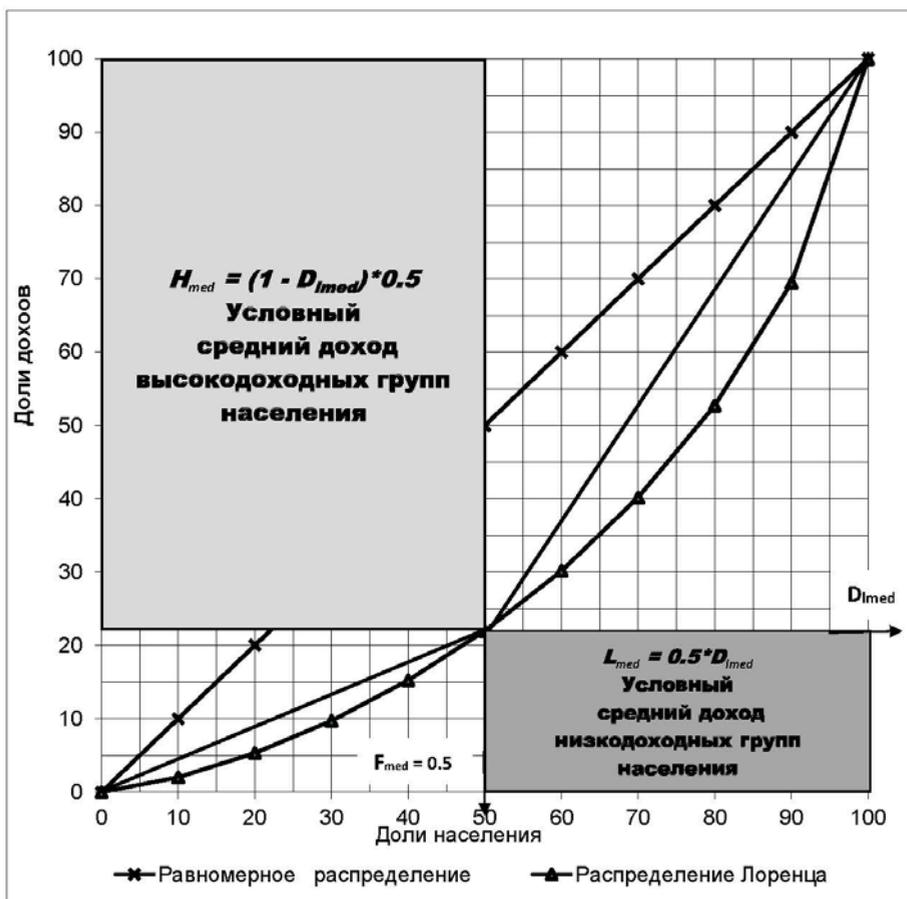


Рис. 4. Графическая интерпретация индекса поляризации дохода медианной численности IME

Индекс поляризации численности медианного дохода IMR

Индикативной границей доходов в этом случае принимается доход, соответствующий численности медианного дохода населения $X_{\varphi med} = \exp(\mu + \sigma^2)$.

По аналогии с расчетами исходных данных для индекса поляризации медианной численности дохода определяются исходные данные для расчета индекса поляризации медианного дохода — IMR :

$$F_{L\varphi med}(X_{\varphi med}) = \Phi_{L\varphi med}(v_{\varphi med}) = \Phi(\sigma);$$

$$D_{L\varphi med}(X_{\varphi med}) = \Phi(0) = 0,5;$$

$$SD_{L\varphi med} = 0,5/\Phi(\sigma);$$

$$F_{H\varphi med}(X_{\varphi med}) = \Phi_{H\varphi med}(v_{\varphi med}) = 1 - \Phi(\sigma);$$

$$D_{H\varphi med}(X_{\varphi med}) = \Phi(0) = 0,5;$$

$$SD_{H\varphi med} = 0,5/(1 - \Phi(\sigma)).$$

Индекс поляризации численности медианного дохода:

$$IMR = SD_{H\varphi med}/SD_{L\varphi med} = \Phi(\sigma)/(1 - \Phi(\sigma))$$

Графическая интерпретация индекса поляризации численности медианного дохода приведена на рис. 5.

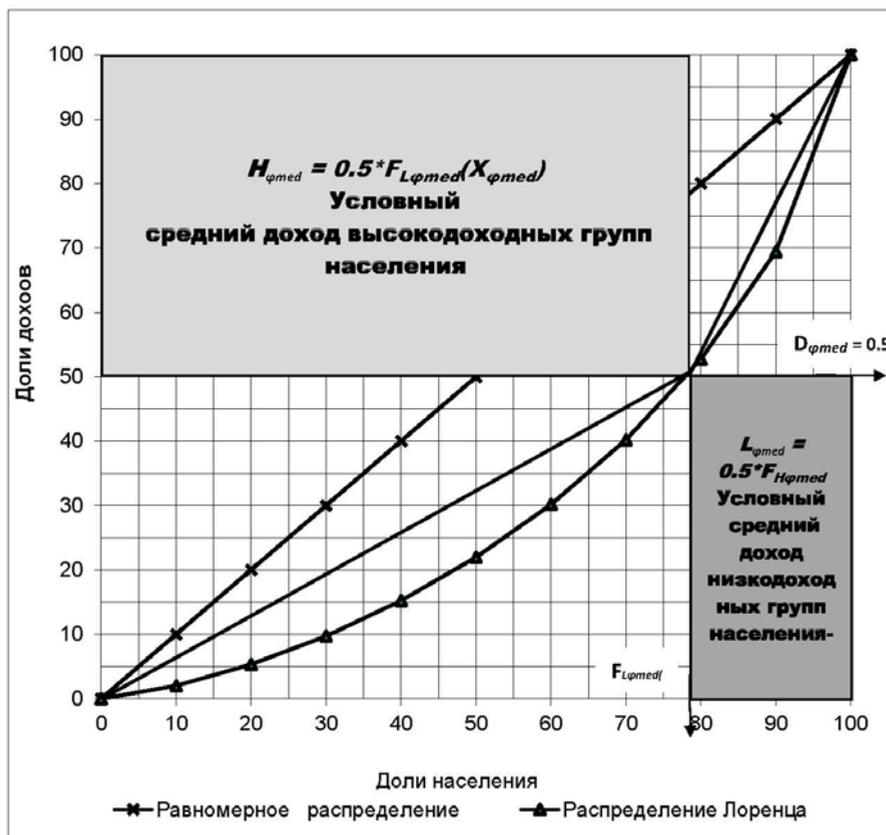


Рис. 5. Графическая интерпретация индекса поляризации численности медианного дохода IMR

Через точку на кривой Лоренца с координатами $\{F_{H\varphi med}(X_{\varphi med}); 0,5\}$ проводятся горизонталь и вертикаль до пересечения с осями координат. Площадь левого верхнего прямоугольника $H_{\varphi med} = F_{H\varphi med}(X_{\varphi med}) \cdot 0,5$ трактуется как условный средний доход населения с доходами выше

медианного дохода, а площадь прямоугольника в правом нижнем углу $L_{\varphi med} = (1 - F_{H\varphi med}(X_{\varphi med})) \cdot 0,5$ — как условный средний доход населения с доходами ниже медианного дохода.

Индекс поляризации численности медианного дохода есть отношение

площадей прямоугольников $H_{\varphi med}$ и $L_{\varphi med}$:

$$IMR = H_{\varphi med}/L_{\varphi med} = \Phi(\sigma)/(1 - \Phi(\sigma)) \quad (13)$$

В случае «абсолютного равенства» $H_{\varphi med} = L_{\varphi med}$ индекс поляризации $IMR = 1$. В случае «абсолютного неравенства» $H_{\varphi med} \rightarrow 1$ и $L_{\varphi med} \rightarrow 0$ и индекс поляризации $IMR \rightarrow \infty$. Теоретический диапазон изменения индекса поляризации численности медианного дохода $1 < IMR < \infty$, а фактический рабочий диапазон изменения значительно меньше.

Сравнивая формулы вычисления индекса поляризации дохода медианной численности IME (12) и индекса поляризации численности медианного дохода IMR (13) отмечаем, что они полностью совпадают. В практике международных сравнений неравенства используются именно эти оценки координат кривой Лоренца [8]. Для оценки дохода медианной численности:

$$F_{Lmed}(X_{med}) = F_{Hmed}(X_{med}) = \Phi(0) = 0,5$$

$$\text{и } D_{Lmed}(X_{med}) = 1 - \Phi(\sigma);$$

для оценки численности медианного дохода:

$$D_{H\varphi med}(X_{\varphi med}) = D_{L\varphi med}(X_{\varphi med}) = \Phi(0) = 0,5$$

$$\text{и } F_{L\varphi med}(X_{\varphi med}) = \Phi(\sigma).$$

Индекс поляризации среднего значения плотности дохода ISD

Индикативной границей доходов в этом случае принимается доход, определяемый формулой среднего значения плотности дохода:

$$X_{\varphi c} = \exp(\mu + 1,5\sigma^2) \quad (8).$$

Исходные данные для расчета индекса ISD :

$$F_{L\varphi c}(X_{\varphi c}) = \Phi_{L\varphi c}(v_{\varphi c}) = \Phi(1,5\sigma);$$

$$D_{L\varphi c}(X_{\varphi c}) = \Phi(0,5\sigma);$$

$$SD_{L\varphi c} = \Phi(0,5\sigma)/\Phi(1,5\sigma);$$

$$F_{H\varphi c}(X_{\varphi c}) = 1 - \Phi(1,5\sigma)/D_{H\varphi c}(X_{\varphi c}) = 1 - \Phi(0,5\sigma);$$

$$SD_{H\varphi c} = (1 - \Phi(0,5\sigma))/(1 - \Phi(1,5\sigma)).$$

Индекс поляризации среднего значения плотности дохода ISD :

$$ISD = SD_{H\varphi c}/SD_{L\varphi c} = ((1 - \Phi(0,5\sigma))/(1 - \Phi(1,5\sigma)))/(\Phi(0,5\sigma)/\Phi(1,5\sigma))$$

Графическая интерпретация индекса поляризации среднего значения плотности дохода приведена на рис. 6. Через точку на кривой Лоренца с координатами $\{F_{L\varphi c}(X_{\varphi c}); D_{L\varphi c}(X_{\varphi c})\}$ проводятся горизонталь и вертикаль до пересечения с осями координат. В левом верхнем углу и правом нижнем образуются два прямоугольника. Площадь левого верхнего прямоугольника $H_{\varphi c} = F_{L\varphi c}(X_{\varphi c}) \cdot (1 - D_{L\varphi c}(X_{\varphi c}))$, а площадь прямоугольника в правом нижнем углу $L_{\varphi c} = (1 - F_{L\varphi c}(X_{\varphi c})) \cdot D_{L\varphi c}(X_{\varphi c})$.

Отношение площадей прямоугольников $H_{\varphi c}$ и $L_{\varphi c}$ и есть индекс поляризации среднего значения плотности дохода.

$$ISD = H_{\varphi c}/L_{\varphi c} = F_{L\varphi c}(X_{\varphi c}) \cdot (1 - D_{L\varphi c}(X_{\varphi c})) / (1 - F_{L\varphi c}(X_{\varphi c})) \cdot D_{L\varphi c}(X_{\varphi c}) = ((1 - \Phi(0,5\sigma)) \cdot \Phi(1,5\sigma)) / (\Phi(0,5\sigma) \cdot (1 - \Phi(1,5\sigma))) \quad (14)$$

В случае «абсолютного равенства» $H_{\varphi c} = L_{\varphi c}$ и индекс поляризации $ISD = 1$. В случае «абсолютного неравенства» $H_{\varphi c} \rightarrow 1$ и $L_{\varphi c} \rightarrow 0$ и индекс поляризации $ISD \rightarrow \infty$. Теоретический диапазон изменения индекса поляризации среднего значения плотности дохода $1 < ISD < \infty$, а фактический — значительно меньше.

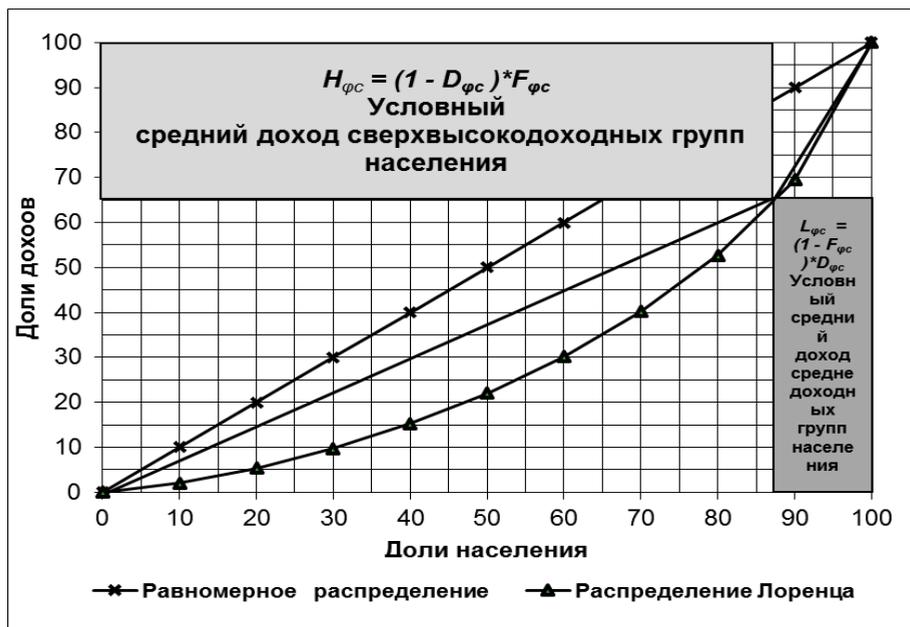


Рис. 6. Графическая интерпретация индекса поляризации среднего значения плотности дохода *ISD*

Величины *индексов поляризации* — аналог коэффициента фондов, так как определяются отношением средних доходов в группах населения с доходами выше и ниже принятой границы доходов. В отличие от коэффициента фондов здесь граница, а соответственно, и численность населения в группах не остаются постоянной величиной, зависит от среднеквадратического отклонения логарифмов доходов.

Оценка точности вычисления индексов поляризации зависит только от точности определения величины среднеквадратического отклонения, которая в свою очередь зависит от точности исходных данных.

Индексы поляризации наряду с индексом Джини, рекомендуются для оценки неравенства населения по уровню денежных доходов. Выбор индексов зависит от поставленных целей анализа или прогноза.

Литература

1. Методологические положения по статистике. Вып. 1. — М.: Госкомстат России, 1996. — 674 с.
2. Великанова Т.Б., Колмаков И.Б., Фролова Е.Б. Совершенствование методики и моделей распределения населения по среднему доходу // Вопросы статистики. — 1996. — № 5 — 1996. — С. 50-58.
3. Великанова Т.Б. Средний, медианный и модальный уровень денежных доходов населения в целом по России и по субъектам Российской Федерации. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/bednost/tab1/tab-bed1-2-6.htm (дата обращения 29.04.2017)

4. Социальное положение и уровень жизни населения России. Стат. сб. — М.: Росстат, 2000-2016.
5. **Колмаков И.Б.** Методология измерения неравенства денежных доходов населения: анализ и прогноз показателей дифференциации и поляризации // Аудит и финансовый анализ. — 2016. — №6. — С. 409-424.
6. **Колмаков И.Б.** Методология анализа интегральных оценок показателей поляризации денежных доходов населения // Вопросы статистики. — 2015. — № 2. — С. 23-36.
7. **Колмаков И.Б.** Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации и поляризации денежных доходов населения: Дисс. ... д-ра экон. наук. — М., 2008.
8. **Миланович Б.** Глобальное неравенство доходов в цифрах: на протяжении истории и в настоящее время: Обзор : докл. к XV Апр. Межд. науч. конф. по проблемам развития экономики и общества, Москва, 1–4 апреля 2014 г. / Пер. с англ. — М.: ИД ВШЭ, 2014.

Bibliography

1. Metodologicheskiye polozheniya po statistike [*Methodological Guidelines on Statistics*]. Issue 1. Moscow. Rosstat. 1996. 674 p.
2. Velikanova T., Kolmakov I., Frolova E. Sovershenstvovaniye metodiki i modeley raspredeleniya naseleniya po srednedushhevomu dokhodu [Improving the methods and models of population distribution by average per capita income]. Voprosy statistiki [*Statistical Studies*]. 1996. № 5. P. 50-58.
3. Velikanova T. Sredniy, mediannyi i modal'nyy uroven' denezhnykh dokhodov naseleniya v tselom po Rossii i po sub'yektam Rossiyskoy Federatsii [Average, median and modal levels of population monetary incomes for Russia on the whole and by the Russian Federation subjects]. Available at: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/bednost/tab1/tab-bed1-2-6.htm (Accessed: 29 April 2017)
4. Sotsial'noye polozheniye i uroven' zhizni naseleniya Rossii [*Social Status and Living Standards of the Russian Population*]. Statistical handbook. Moscow. Rosstat. 2000-2016.
5. Kolmakov I. Metodologiya izmereniya neravenstva denezhnykh dokhodov naseleniya: analiz i prognoz pokazateley differentsiatsii i polyarizatsii [Methodology for measuring inequality of the population monetary incomes: analysis and forecast of differentiation and polarization]. Audit i finansovyy analiz [*Audit and Financial Analysis*]. Moscow. 2016. №6. P. 409-424.
6. Kolmakov I. Metodologiya analiza integral'nykh otsenok pokazateley polyarizatsii denezhnykh dokhodov naseleniya [Methodology for analysis of integral estimates of the indicators of polarization of the population monetary incomes]. Moscow. Voprosy statistiki [*Statistical Studies*]. 2015. № 2. P. 23-26.
7. Kolmakov I. Metody i modeli prognozirovaniya pokazateley differentsiatsii i polyarizatsii denezhnykh dokhodov naseleniya [Methods and models of forecasting the indicators of differentiation and polarization of the population monetary incomes]. Moscow. Thesis of the Doctoral diss. 2008.
8. Milanovic B. Global'noye neravenstvo dokhodov v tsifrakh: na protyazhenii istorii i v nastoyashcheye vremya: obzor: doklad k XV Apr. mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii po problemam razvitiya ekonomiki i obshchestva [*Global Income Inequality in Numbers: in History and Now. Overview of the reports at the XV April international scientific conf. on development of economy and society*]. Moscow, April 1-4, 2014. (in Russian). Moscow. Izdatel'skiy dom Vyshey shkoly ekonomiki [Higher School of Economics]. 2014.